ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ НА СОРЕВНОВАНИЯХ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Киндер Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет
mkinder@rambler.ru

Аннотация: Многие спортивные соревнования по информатике нуждаются в оригинальных олимпиадных задачах высокого качества. В статье представлен один из подходов по составлению алгоритмических разноуровневых задач по теории чисел. Для их решения используются различные алгоритмы, зависящие в первую очередь от размерности задачи. Все представленные алгоритмы имеют элементарную структуру и доступны для понимания школьникам и студентам, то есть основным группам участников соревнований по программированию. Рассмотренные в статье задачи перечисления упорядоченных наборов натуральных чисел с заданным наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным обладают тесными связями с известными арифметическими функциями. Большинство примеров в статье взяты из практики одного из престижных командных соревнований по олимпиадному программированию — Открытого кубка им. Е.В.Панкратьева (этап «Гран-При Татарстан»). Полные тексты всех этих задач доступны в Интернете: http://codeforces.com/gym/100942?locale=ru.
Ключевые слова: олимпиады по программированию, спортивные соревнования по информатике, задачи по теории чисел.

PROBLEMS OF NUMBER THEORY IN PROGRAMMING CONTESTS

Kinder Mihail Ivanovich,
PhD, Associate Professor
Kazan (Volga) Federal University
mkinder@rambler.ru

Abstract: There are many different competitions in the field of informatics with different objectives. In spite of these differences, they all share the same need for high quality tasks. This paper describes the algorithmic tasks of number theory of different levels of difficulty. Most tasks are used in the specific scope of teaching and learning informatics. In this paper we consider the problems of enumerating the number of ordered tuples of positive integers with fixed greatest common divisor and least common multiple, and we analyze the some properties of the resulting arithmetic functions. The important feature of these tasks is that they are multilevel tasks. They assume to use solution algorithms of various complexity which depend on dimension of the task. All algorithms we present have low sample complexity that depends only on the input parameters. Many of the examples in this paper are taken from the Open Cup named after E.V. Pankratiev (Grand-Prix of Tatarstan). Full texts for all of these problems are available on the Internet: http://codeforces.com/gym/100942?locale=en . We hope that some classes of such tasks would enlarge scope of tasks for use in programming contests at various levels.
Keywords: programming contests, olympiads of informatics, tasks of number theory, training.

1. Введение

Каждый год проводится огромное количество олимпиад по информатике регионального, национального и международного уровня, каждая из них «требует» оригинальных и достаточно сложных задач. Как правило, на соревнованиях по программированию команды участников должны продемонстрировать не только хорошее понимание базовых алгоритмов, но и их свободную техническую реализацию [2]. В большинстве случаев олимпиады по информатике используют автоматическую проверку представленных участниками решений. Это достигается путем запуска их на пакетах входных данных и проверки правильности вывода.

Первый командный конкурс по спортивному программированию в Казани, столице Татарстан, состоялся в 2000-м году. К настоящему моменту это соревнование имеет международный статус, имеет свои традиции и богатую историю. В 2017 году будет организован 17-й открытый чемпионат Республики Татарстан - международный Турнир ICL (International Computers Limited) по программированию [8]. Правила ее проведения совпадают с правилами чемпионата мира по спортивному программированию ACM ICPC: команда участников состоит из трёх человек, в её распоряжении имеется только один компьютер, и в течение пяти часов она решает от 10 до 12 довольно сложных олимпиадных задач. Успешное решение этих проблем требует отличной математической подготовки, знания алгоритмов и структур данных, а также умения участников работать в команде.

Школьники Татарстана, участники турниров ICL, часто становились победителями и призёрами заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по информатике. Уже став студентами, многие из них продолжали свой олимпиадный путь на командных соревнованиях по программированию. В 2015 году студенты Казанского федерального университета вышли в финал престижного чемпионата мира в Collegiate Programming Contest (Международная студенческая олимпиада по программированию). Этот конкурс состоит из нескольких этапов. Для того, чтобы выйти в финал, необходимо было показать лучшие результаты в региональном и субрегиональном этапах конкурса, где участвовали около 13 тысяч команд из почти трех тысяч университетов в 90 странах мира.

Ежегодно команды по спортивному программированию посещают летний и зимний лагерь, организованный специально для них в Петрозаводске и Ижевске, где вместе с российскими программистами в соревнованиях принимают участие команды из Польши, Чехии, Японии, Украины и Белоруссии. Кроме того, в течение года проводятся несколько открытых чемпионатов по программированию, где также можно встретить потенциальных финалистов ACM ICPC. Среди них отметим Открытую Всесибирскую олимпиаду по программированию им. И.В. Потосина, Открытый Чемпионат Республики Татарстан — Турнир ICL и Чемпионат Урала.

2. Избранные задачи по теории чисел Турнира ICL

Подавляющее большинство олимпиадных задач, возникающих на соревнованиях по программированию, являются математическими. Обычно такие задачи относятся к одной из следующих категорий: комбинаторика, теория чисел, теории графов, геометрия, структуры данных. Идеи олимпиадных проблем часто приходят из различных математических дисциплин, однако некоторые разделы математики особенно полезны для создания задач по олимпиадной информатике. В статье [5] мы обсуждали особенности комбинаторных задач на соревнованиях по программированию. В этом параграфе мы остановимся на теоретико-числовых задачах турнира ICL. Рассмотрим следующую задачу.

НАИМЕНЬШАЯ ДРОБЬ [Открытый Кубок имени Е.В.Панкратьева, 2016, автор — *М. Киндер*.]

Три с половиною овечки
и восемь сотых пастуха
однажды встретили у речки
четыре пятых петуха.
М. Вейцман «Действия с дробями».

В настоящее время миру известно огромное количество сенсационных археологических находок. Во время последних раскопок были обнаружены носители информации, относящиеся к эпохе программирования XX века. Расшифровка файлов позволила ученым доказать гипотезу о том, что древние программисты обладали искусством производить простейшие арифметические операции с дробями. Многие тексты были расшифрованы, многие загадки были разгаданы. Однако среди нерешенных оказалась задача о вычислении наименьшей положительной дроби, при делении которой на каждую из n заданных дробей a_i / b_i *получаются целые числа. Возможно, это удастся сделать вам...*

Здесь a_i *и* b_i *— числитель и знаменатель несократимой дроби*: $1 \le a_i \le 10^3$, $1 \le b_i \le 10^9$; $1 \le i \le n$, $1 \le n \le 6$. (*В ответе запишите через пробел два положительных целых числа — числитель и знаменатель наименьшей несократимой дроби, удовлетворяющей условию задачи.*)

Это простая задача, которую решило большинство команд-участниц Турнира ICL. Пусть x / y - требуемая несократимая дробь. (Дробь x / y является *несократимой* в том и только в том случае, если числа x и y взаимно простые, то есть их наибольший общий делитель равен 1.) Нетрудно доказать, что

$$x = \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n), \qquad y = \text{НОД}(b_1, b_2, \dots, b_n),$$

то есть число x совпадает с наименьшим общим кратным всех чисел a_i, а число y — с наибольшим общим делителем всех чисел b_i. В частности, если все числа a_i взаимно простые, то $x = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

Поскольку все числа a_i не превосходят 10^3, число n будет не более 10^{18}.

Следующая задача также связана с наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным натуральных чисел.

НОД и НОК [Открытый Кубок имени Е.В.Панкратьева, 2016, автор — *М. Киндер*.]

Вам приходилось когда-нибудь вычислять наибольший общий делитель нескольких чисел? А наименьшее общее кратное? Ну, конечно, да, ... А приходилось ли вам находить сами числа по известным значениям их наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК)? Ну, или хотя бы определять, сколько таких наборов имеют заданные значения НОД и НОК? Наверное, нет, ... Итак, вам необходимо подсчитать количество упорядоченных наборов из k *целых положительных чисел, у которых наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное равны* d *и* m *соответственно. Например, при* $k = 2$, $d = 2$, $m = 12$ *таких упорядоченных наборов четыре:* (2,12), (12,2), (4,6) *и* (6,4).

Здесь $2 \le k \le 10^{18}$, $1 \le d \le m \le 10^9$. (*В ответе запишите количество упорядоченных наборов по модулю* $(10^9 + 9)$.)

Прежде всего, отметим, что наименьшее общее кратное всегда делится на наибольший общий делитель, поэтому если НОК чисел, равный m, не делится на d, то нет ни одного требуемого набора. Если же m кратно d, то все числа, входящие в искомый кортеж, делятся на d. Разделив все числа на d, получим набор чисел, у которых НОД равен 1, а НОК равен $M = m / d$. Разложим число M на простые множители $M = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, тогда условию задачи удовлетворяют все наборы чисел $a_i = p_1^{\alpha[i,1]} p_2^{\alpha[i,2]} \dots p_r^{\alpha[i,r]}$, $1 \le i \le k$, у которых неотрицательные показатели $\alpha[i,s]$ степеней простых чисел p_s не превосходят α_s и для которых выполняются условия

$$\min(\alpha[1,s], \alpha[2,s], \dots, \alpha[k,s]) = 0,$$
$$\max(\alpha[1,s], \alpha[2,s], \dots, \alpha[k,s]) = \alpha_s,$$

для всех $1 \le s \le k$. Подсчитаем число наборов по каждому показателю α отдельно. Количество наборов, которые удовлетворяют условиям $0 \le \alpha_i \le \alpha$ и $\min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = 0$, равно

$$t[k,\alpha] = (\alpha + 1)^k - \alpha^k.$$

Количество наборов, которые удовлетворяют условиям $0 \le \alpha_i \le \alpha$ и $\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha$, равно

$$t[k,\alpha - 1] = \alpha^k - (\alpha - 1)^k.$$

Отсюда количество наборов, которые удовлетворяют обоим условиям, равно

$$t[k,\alpha] - t[k,\alpha - 1] = (\alpha + 1)^k - 2\alpha^k + (\alpha - 1)^k.$$

По правилу произведения число наборов по всем показателям α_s равно [1]:

$$L(M,k) = \prod_{i=1}^{r} \left[(\alpha_i + 1)^k - 2\alpha_i^k + (\alpha_i - 1)^k\right].$$

Например, для $M = 12 = 2^2 \cdot 3^1$ и $k = 2$ получаем

$$L(M,2) = [(2 + 1)^2 - 2 \cdot 2^2 + (2 - 1)^2] \cdot [(1 + 1)^2 - 2 \cdot 1^2 + (1 - 1)^2] = 4$$

упорядоченных набора из двух чисел, у которых НОД равен 1, а НОК равен 12. Для чисел k из диапазона $[1; 10^{18}]$ используем бинарный алгоритм возведения в степень. Это приводит к решению с алгоритмической сложностью $O(Fact(M) + \log k)$.

Энциклопедия целочисленных последовательностей [9] наполнена замечательными в теоретическом и практическом отношении задачами и рекуррентными соотношениями; простое просматривание отдельных статей энциклопедии может привести к созданию новых интересных олимпиадных задач. Следующая задача возникла из рассмотрения свойств последовательности A038547 [9].

Красивые суммы [Открытый Кубок имени Е.В.Панкратьева, 2015, автор — *М. Киндер*.]

Красивыми суммами называют суммы из нескольких подряд идущих положительных целых чисел. Например, суммы 7 + 8 *и* 4 + 5 + 6 *— красивые, а сумма* 3 + 5 + 7 *— некрасивая, хотя результат суммирования во всех случаях равен* 15. *(Сумма из одного слагаемого* 15 *тоже считается красивой.) Исходя из этого, красотой целого положительного числа будем называть количество представлений этого числа в виде красивых сумм. Например, красота числа* 15 *равна* 4, *поскольку* 15 *представляется в виде красивых сумм четырьмя способами:* 15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. *Из двух целых чисел более красивым считается то, у которого больше представлений в виде красивых сумм. При равенстве количеств таких представлений предпочтение в красоте отдаётся меньшему из них. Например,* 15 *— наименьшее целое число красоты* 4.

Вам необходимо найти наименьшее целое положительное число красоты n *(*$1 \le n \le 10^5$).

Задачи разбиения чисел на части в виде последовательных слагаемых и подсчета количества представлений этого типа относятся к математическому фольклору и изучались многими авторами ([3], [4], [6], [7]). Предположим, что N является суммой нескольких последовательных положительных целых чисел

$$N = a + (a + 1) + \ldots + (a + k) = \frac{1}{2}(k + 1)(2a + k), \qquad k \geq 0.$$

Сумма $k + 1$ и $2a + k$ равна нечётному числу $2(a + k) + 1$. Значит, числа $k + 1$ и $2a + k$ имеют противоположную четность, то есть одно из них чётное, а другое — нечётное. Поэтому количество разбиений N на одно или более последовательных слагаемых равно числу нечётных делителей N. Например, у числа 15 четыре нечётных делителей 1, 3, 5 и 15, и столько же разбиений на последовательные слагаемые. Отсюда получаем простой способ вычисления красоты натурального числа N. Для этого нужно разложить N на простые множители, отбросить в его разложении все степени двойки, и для оставшегося произведения подсчитать количество его натуральных делителей. Эта известная теоретико-числовая функция легко вычисляется в виде произведения увеличенных на единицу показателей степеней всех нечётных простых множителей. Например, число 90 имеет красоту 6, поскольку в разложении $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ нечётные простые множители 3 и 5 входят в степенях 2 и 1, и значит, количество его нечётных делителей равно $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$. Таким образом, если $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \ldots$ — наименьшее целое число красоты n, то показатели в его разложении удовлетворяют уравнению

$$(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots = n.$$

Отсюда получается следующий алгоритм решения задачи. Выписываем все разложения числа n на множители в невозрастающем порядке. Например, для $n = 15$ это будут 15 и $5 \cdot 3$. Каждому из них соответствует некоторое наименьшее нечётное число N. Для $n = 15$ это будут 3^{14-1} и $3^{5-1} \cdot 5^{3-1}$, среди них выбираем наименьшее. Для сравнения чисел между собой необязательно их вычислять — достаточно сравнить логарифмы этих чисел. (См. также [10].)

3. Заключение

Создание оригинальных олимпиадных задач является сложным и длительным процессом. В этой статье представлен наш подход к составлению алгоритмических задач по теории чисел различного уровня сложности. Все представленные алгоритмы имеют элементарную структуру и доступны для понимания школьникам и студентам. Рассмотренные задачи перечисления упорядоченных наборов натуральных чисел с заданным наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным тесно связаны с известными арифметическими функциями. Большинство примеров в статье взяты из практики одного из престижных командных соревнований по олимпиадному программированию — Открытого кубка им. Е.В.Панкратьева (этап «Гран-При Татарстан»). Полные тексты всех этих задач доступны в Интернете: http://codeforces.com/gym/100942?locale=ru.

Список литературы

1. Bagdasar O. On Some Functions Involving the lcm and gcd of Integer Tuples // Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Appl. Maths. Inform. and Mech. — 2014. — vol. 6, 2. — pp. 91-100.
2. Burton B. Informatics olympiads: challenges in programming and algorithm design. In: Dobbie, G. and Mans, B. (Eds.) Proceedings of Thirty-First Australasian Computer Science Conference (ACSC 2008), Wollongong, NSW, Australia. CRPIT, 74. — 2008. — pp. 9–13.
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — 703 с. — (Задача 2.30.)
4. Hirschhorn M., Hirschhorn P. Partitions into consecutive parts // Mathematics Magazine, 78. — 2005. — pp. 396–397.
5. Kinder M., Falileeva M., Shakirova L. Combinatorial problems of enumeration in programming contests / INTED2016 Proceedings. 10th International Technology, Education and Development Conference, Valencia, Spain. March 7th-9th. — 2016. — pp. 0510-0513.
6. Nyblom M. On the representation of the integers as a difference of nonconsecutive triangular numbers // Fibonacci Quarterly, 39:3. — 2001. — pp. 256-263.
7. Verhoeff T. Rectangular and Trapezoidal Arrangements // Journal of Integer Sequences, 99.1.6. — 1999. — vol. 2.
8. www.icl.ru/turnir
9. http://oeis.org
10. http://oeis.org/A038547